

PHẦN A. GIẢI TÍCH

CHƯƠNG I. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Mục tiêu

- Sau khi nghiên cứu xong chương này, học sinh có thể:
- Hiểu được các kiến thức cơ bản về phương trình mũ và phương trình logarit; bất phương trình mũ và bất phương trình logarit; nguyên hàm; tích phân; ứng dụng của tích phân trong hình học.
 - Trình bày được các dạng bài tập về phương trình mũ và phương trình logarit; bất phương trình mũ và bất phương trình logarit; nguyên hàm; tích phân; ứng dụng của tích phân trong hình học.
 - Mô tả được các ứng dụng của tích phân trong hình học.
 - Áp dụng được vào các bài toán cụ thể về phương trình mũ và phương trình logarit; bất phương trình mũ và bất phương trình logarit; nguyên hàm; tích phân; ứng dụng của tích phân trong hình học.

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Phương trình mũ

1.1. Phương trình mũ căn bản

Phương trình mũ căn bản có dạng:

$$a^x = b \quad (a > 0, \quad a \neq 1) \quad (1)$$

Với $b \leq 0$, ta có phương trình (1) vô nghiệm;

Với $b > 0$; ta có phương trình (1) có nghiệm duy nhất: $x = \log_a b$.

1.2. Cách giải một số phương trình mũ đơn giản

1.2.1. Đưa về cùng cơ số

$$a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$\begin{aligned} 9^{x+1} &= 27^{x-2} \\ \Leftrightarrow (3^2)^{x+1} &= (3^3)^{x-2} \\ \Leftrightarrow 3^{2x+2} &= 3^{3x-6} \\ \Leftrightarrow 2x+2 &= 3x-6 \\ \Leftrightarrow x &= 8 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 8$.

1.2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ:

$$\text{đặt } t = a^{u(x)}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\begin{aligned} 3^{2x-2} + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 &= 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow 3^{2(x-1)} + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3^{x-1})^2 + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Đặt: $t = 3^{x-1}$, ($t \geq 0$)

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (t)^2 + 2 \cdot t - 3 = 0 \\ &\Rightarrow t = 1 \text{ (nhận)} \vee t = 3 \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $t = 3 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

1.2.3. Phương pháp lôgarit hóa: $u > 0, v > 0$ thì $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$

Ví dụ 3: Giải phương trình $3^{x-1} \cdot 2^x = 4^{x-2}$

$$3^{x-1} \cdot 2^x = 4^{x-2} \Leftrightarrow \log_2(3^{x-1} \cdot 2^x) = \log_2(4^{x-2})$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3^{x-1}) + \log_2(2^x) = \log_2(4^{x-2})$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \log_2 3 + x \cdot \log_2 2 = (x-2) \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \log_2 3 + x = (x-2) \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 3 - 1)x = \log_2 3 - 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_2 3 - 4}{\log_2 3 - 1} = \frac{\log_2 3 - \log_2 16}{\log_2 3 - \log_2 2} = \frac{\log_2 \frac{3}{16}}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{16}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{16}$

2. Phương trình lôgarit

2.1. Phương trình lôgarit căn bản:

$$\log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m \quad (m \in \mathbb{R})$$

Ví dụ 4: $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$

2.2. Cách giải một số phương trình lôgarit đơn giản

2.2.1. Đưa về cùng cơ số:

$$u > 0, v > 0 \text{ thì } \log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $\log_4 x^2 = \log_2(-x + 2)$

Điều kiện: $-x + 2 > 0$ và $x \neq 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x \neq 0$

$$\log_4 x^2 = \log_2(-x + 2) \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(-x + 2) \Leftrightarrow x = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{nhận})$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

2.2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 6: Giải phương trình

$$\frac{6}{1 + \log_2 x} + \frac{4}{2 \log_2 x} = 3$$

Điều kiện: $x > 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{2}$

Đặt $t = \log_2 x; t \neq 0; t \neq -1$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{1+t} + \frac{4}{2t} = 3$$

$$\Leftrightarrow 12t + 4 + 4t = 6t + 6t^2$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 10t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Với $t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 4$ hoặc $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau đây

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} = \left(\frac{8}{12}\right)^x$

b) $(2)^{3-x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2x^2}$

c) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$

d) $64^x - 8^x - 56 = 0$

e) $3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x = 9^x$

2. Giải các phương trình sau đây

a/ $\log_3(5x + 3) = \log_3(7x + 5)$

b/ $\log(x - 1) - \log(2x - 11) = \log 2$

c/ $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$

d/ $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x - 3)$

e/ $\log_{x-1} 4 = 1 + \log_2(x - 1)$

f/ $\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1$

g/ $\log_2(x - 5) - \log_2 x = 3$

BÀI 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Bất phương trình mũ

1.1. Bất Phương trình mũ cơ bản

Bất Phương trình mũ cơ bản dạng : $a^x > b$; ($a > 0$ và $a \neq 1$) hoặc $a^x < b$; $a^x \leq b$; $a^x \geq b$

Lưu ý công thức:

Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$

1.2. Một số bất phương trình mũ đơn giản

Tương tự như phương trình mũ đơn giản thì bất phương trình mũ có các dạng bất phương trình mũ đơn giản và có phương pháp giải bất phương trình mũ như sau:

Có thể dùng một trong các phương pháp sau đây

- Đưa về cùng một cơ số
- Phương pháp đặt ẩn phụ
- Phương pháp logarit hóa

Ví dụ 1:

a) Giải bất phương trình $2^{3x-4} > 0,25$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-4} > 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 3x-4 > -2 \quad \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bpt là: $S = (\frac{2}{3}; +\infty)$.

b) Giải bất phương trình : $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$$
 (2)

Đặt $t = 2^x > 0$, ($t > 0$)

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow t < 1 \text{ hoặc } t > 2$$

Với $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < 2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0)$

Với $t > 2 \Leftrightarrow 2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1; +\infty)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

2. Bất phương trình lôgarit

2.1. Bất Phương trình lôgarit cơ bản

Bất Phương trình lôgarit cơ bản dạng : $\log_a x > b$; ($a > 0$ và $a \neq 1$)

hoặc $\log_a x < b$; $\log_a x \geq b$; $\log_a x \leq b$

Lưu ý công thức:

Nếu $a > 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$

Nếu $0 < a < 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

2.2. Một số bất phương trình lôgarit đơn giản

Tương tự như phương trình lôgarit đơn giản thì bất phương trình lôgarit có các dạng bất phương trình lôgarit đơn giản và có phương pháp giải bất phương trình lôgarit như sau. Có thể dùng một trong các phương pháp sau đây

- Đưa về cùng một cơ số

- Phương pháp đặt ẩn phụ
- Phương pháp mũ hóa

Ví dụ 2:

a) Giải bất phương trình $\log_{0,5}(5x + 10) < \log_{0,5}(x^2 + 6x + 8)$.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5x + 10 > 0 \\ x^2 + 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -4 \text{ hoặc } x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$$

Do cơ số 0,5 bé hơn 1 nên bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 5x + 10 &> x^2 + 6x + 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow -2 < x &< 1 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-2; 1)$

b) Giải bất phương trình $\log_{0,5}(1 - 2x) > 1$

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện: } 1 - 2x > 0 &\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \log_{0,5}(1 - 2x) &> \log_{0,5}0,5 \\ \Leftrightarrow 1 - 2x &< 0,5 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$.

c) Giải bất phương trình : $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện: } \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 \\ \Leftrightarrow \log_2(x - 3)(x - 2) &\leq \log_2 2 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $3 < x \leq 4$.

BÀI TẬP

1. Giải các bất phương trình mũ

- 1) $64^x - 8^x - 56 > 0$
- 2) $3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x \leq 9^x$
- 3) $25^x - 3 \cdot 5^x + 2 > 0$
- 4) $3^{2x-4} > \frac{1}{27}$

2. Giải các bất phương trình lôgarit

- 1/ $\log_8(4 - 2x) \geq 2$
- 2/ $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$
- 3/ $2^{3+4x} > 1$
- 4/ $16^x < 0,25$
- 5/ $\log_{1/3}(x^2 - 6x + 5) > 2\log_3(2 - x)$
- 6/ $\log(x - 1) - \log(2x - 11) > \log 2$
- 7/ $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) < 3$
- 8/ $\log(x^2 - 6x + 7) \geq \log(x - 3)$

BÀI 3. NGUYÊN HÀM

1. Nguyên hàm và tính chất

1.1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Ví dụ 1:

a) Hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ vì $F'(x) = (x^2)' = 2x; \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}; \forall x \in (0; +\infty)$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Kí hiệu

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$
(Vì $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$)

Ví dụ 2:

a) Với $x \in (-\infty; +\infty); \int 2x dx = x^2 + C;$

b) Với $x \in (0; +\infty); \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C;$

c) Với $x \in (-\infty; +\infty); \int \cos x dx = \sin x + C$

1.2. Tính chất của nguyên hàm

$$\begin{aligned} 1) & \int f(x)' dx = f(x) + C; \\ 2) & \int kf(x) dx = k \int f(x) dx; k \text{ là hằng số khác } 0; \\ 3) & \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \end{aligned}$$

Ví dụ 3:

1) $\int (\cos x)' dx = \int (-\sin x) dx = \cos x + C$

2) Với $x \in (0; +\infty)$ ta có

$$\int \left(5\sin x + \frac{3}{x} \right) dx = 5 \int \sin x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = -5\cos x + 3\ln x + C$$

1.3. Sự tồn tại nguyên hàm

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

Ví dụ 4:

a) Hàm số $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ có nguyên hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$$

b) Hàm số $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm trên từng khoảng $(k\pi; (k+1)\pi); (k \in \mathbb{Z})$ và

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

1.4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0 \, dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; (a > 0; a \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; (n \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

2. Phương pháp tính nguyên hàm

2.1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1 :

Nếu $\int f(u) \, du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = F(u(x)) + C.$$

❖ **Hệ quả.** Với $u = ax + b$ ($a \neq 0$), ta có

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Ví dụ 5: Tính $\int \sin(3x - 1) \, dx$

Vì

$\int \sin u \, du = -\cos u + C$ nên theo hệ quả ta có

$$\int \sin(3x - 1) \, dx = -\frac{1}{3} \cos(3x - 1) + C$$

2.2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lý 2:

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx.$$

▪ **Chú ý:**

Vì $u'(x)dx = du$; $v'(x)dx = dv$; nên đẳng thức trên còn được viết dưới dạng:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Đây là công thức tính nguyên hàm từng phần.

3. Bài tập áp dụng

Ví dụ 6: Tính $I = \int \cos x \sin^3 x \, dx$

Giải

Đặt $t = \sin x \Leftrightarrow dt = \cos x \, dx$

Khi đó

$$I = \int \cos x \sin^3 x \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

Ví dụ 7: Tính các tích phân sau

a) $\int xe^x dx$ b) $\int x \cos x dx$ c) $\int \ln x dx$

Giải

a) $I = \int xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Do đó $I = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x du = xe^x - e^x + C$

b) $I = \int x \cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

c) $I = \int \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$I = \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

BÀI TẬP

1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}};$

b) $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x};$

d) $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 3x$

e) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-5)};$

f) $f(x) = \frac{1}{(-2x+3)(2x+9)}$

2. Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính

a) $\int (3-x)^{10} dx;$

b) $\int x(1+x^2)^{20} dx$

c) $\int \cos^2 x \cdot \sin x dx;$

d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$

3. Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

a) $\int x \sin^2 x dx;$

b) $\int x^2 \sin x dx$

c) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$

d) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$

e) $\int x \ln(x+1) dx;$

f) $\int x \sin(2x+1) dx$

g) $\int (1-x) \cos x dx;$

h) $\int x \sin x dx$

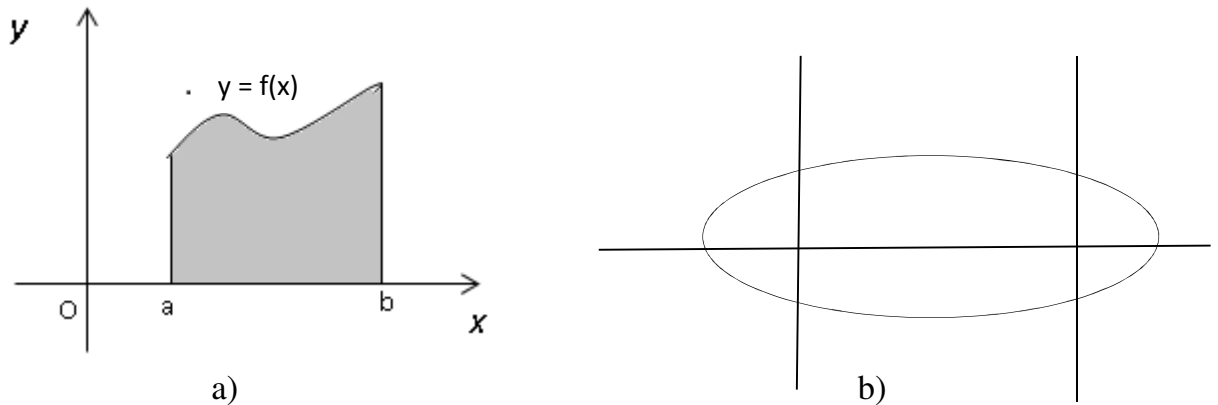
BÀI 4. TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

1.1. Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ được gọi là **hình thang cong** (H. 1a)

Ở lớp dưới, ta đã biết cách tính diện tích hình chữ nhật, hình tam giác. Bây giờ, ta xét bài toán tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi một đường cong kín bất kì (H. 1b).



Hình 1

Bằng cách kẻ các đường thẳng song song với các trục tọa độ, ta chia D thành những hình nhỏ là những hình thang cong (H.1a). Bài toán trên được đưa về tính diện tích của hình thang cong.

Bài toán tìm diện tích hình thang cong bất kì:

Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $x = a$; $x = b$; ($a < b$), trục hoành và đường cong $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$.

Với mỗi $x \in [a; b]$. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đó nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với Ox lần lượt tại a và x (H.2).

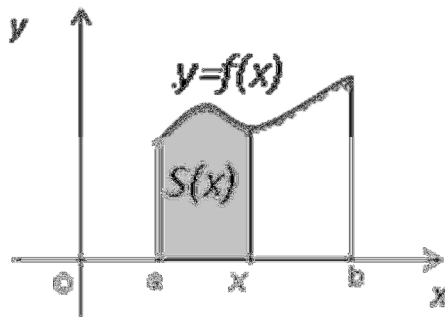
Ta chứng minh được $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì có một hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$. Vì $S(a) = 0$ nên $F(a) + C = 0$ hay $C = -F(a)$.

Vậy $S(x) = F(x) - F(a)$.

Thay $x = b$ vào đẳng thức trên, ta có diện tích của hình thang cần tìm là

$$S(b) = F(b) - F(a).$$



Hình 2

1.2. Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

Chú ý:

Trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước

$$\int_a^a f(x) dx = 0; \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Ví dụ 1:

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

▪ Nhận xét:

- Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x) dx$ hay $\int_a^b f(t) dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận $a; b$ mà không phụ thuộc vào biến số x hay t .
- Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a; x = b$ (H.1a). Vậy

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. Tính chất của tích phân

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx; k \text{ là hằng số} \\ 2) \quad & \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ 3) \quad & \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $\int_0^2 (4x^3 - 2x + 5) dx$

Giải

$$\int_0^2 (4x^3 - 2x + 5) dx = 4 \int_0^2 x^3 dx - 2 \int_0^2 x dx + 5 \int_0^2 dx = (x^4)|_0^2 - (x^2)|_0^2 + 5(x)|_0^2 = 22$$

3. Phương pháp tính tích phân

3.1. Phương pháp đổi biến

Định lí. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Ví dụ 3: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

Giải

Đặt $u = \sin x$. Ta có $u' = \cos x$.

Khi $x = 0$ thì $u(0) = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

3.2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Định lí. Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

$$\text{hay } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Ví dụ 4: Tính

$$I = \int_1^e \ln x dx$$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - 1 \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

4. Bài tập áp dụng

Bài 1: Tính

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$$

Giải

Đặt $u = 1 + x^2$; ta có $u' = 2x$; $u(0) = 1$; $u(1) = 2$ nên

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) = \frac{3}{16}.$$

Bài 2: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1.$$

Bài 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 (x\sqrt{x} + 2x^3 + 5) dx$

b) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2} dx;$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$

e) $\int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x dx$

b) $\int_0^2 (x^3\sqrt{x} + x^5\sqrt{x} + 7x) dx;$

2. Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính

a) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$

b) $I = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx;$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

$$d) \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$$

$$b) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx;$$

3. Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần, hãy tính

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) \sin x dx$$

$$b) \int_{\frac{1}{2}}^e x^2 \ln x dx;$$

$$c) I = \int_1^{\pi} x(1 + \cos x) dx$$

$$d) \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 3) \sin x dx;$$

$$e) \int_0^1 \ln(1 + x) dx$$

$$b) \int_0^2 (x^2 - 2x - 1) e^{-x} dx;$$

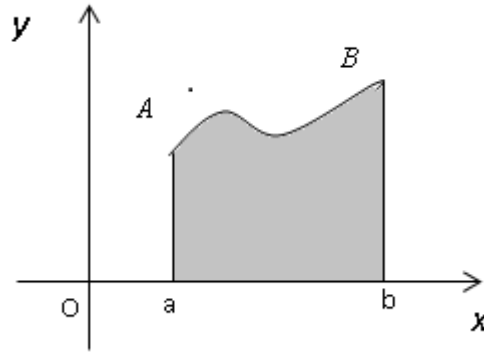
BÀI 5. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

1. Tính diện tích hình phẳng

1.1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ (H. 4) được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

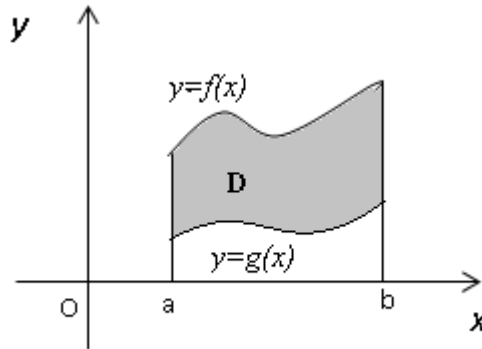


Hình 3

1.2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$; $x = b$ (H. 5) được tính bởi công thức.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (*)$$



Hình 4

Chú ý: Khi áp dụng công thức (*), cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy, ta giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn $[a, b]$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm c ; d ($c < d$). Khi đó, $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên các đoạn $[a; c]$; $[c; d]$; $[d; b]$. Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn $[a; c]$, ta có

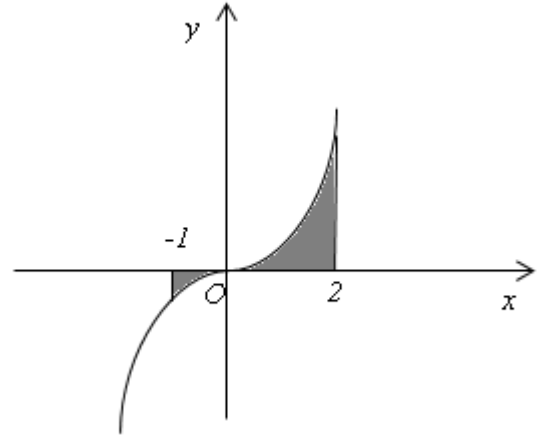
$$\int_a^c |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 2$ (H.6)

Giải

$$S = \int_{-1}^2 |x^3| dx = \int_{-1}^0 (-x)^3 dx + \int_0^2 x^3 dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{17}{4}$$



Hình 5

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số: $y = x^2 - x - 4$ và $y = x - 1$.

Giải

Ta có: hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^2 - x - 4 = x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx$$

Do $x^2 - 2x - 3 < 0; \forall x \in [-1; 3]$

Suy ra

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx = S = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{32}{3}$$

2. Tính thể tích

2.1. Thể tích của vật thể

Vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a$; $x = b$; $a < b$, $S(x)$ là diện tích của thiết diện của vật thể trên một mặt phẳng vuông góc với Ox . $S(x)$ liên tục trên $[a; b]$.

Thể tích vật thể là

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2.2. Thể tích của khối chóp và khối chóp cụt

* Thể tích của khối chóp là:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Với khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B .

* Thể tích của khối chóp cụt là:

$$V = \frac{h}{3} (B + \sqrt{B \cdot B'} + B')$$

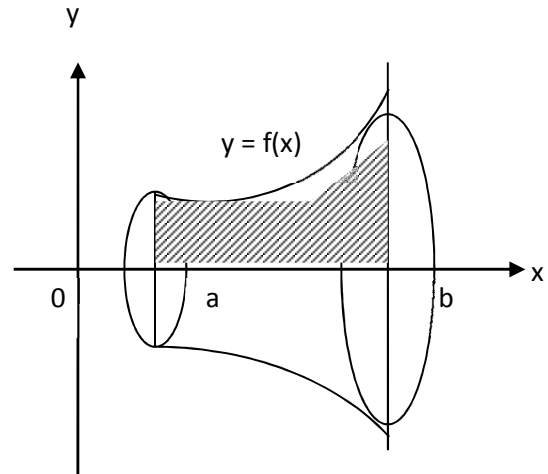
Với khối chóp cắt tạo bởi khối chóp đỉnh S có diện tích hai đáy lần lượt là B; B' và có chiều cao bằng h.

3. Thể tích khối tròn xoay

3.1. Thể tích khối tròn xoay quay quanh trục ox

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ (C); $x = a$; $x = b$, $y = 0$; ($a < b$), quay quanh Ox

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

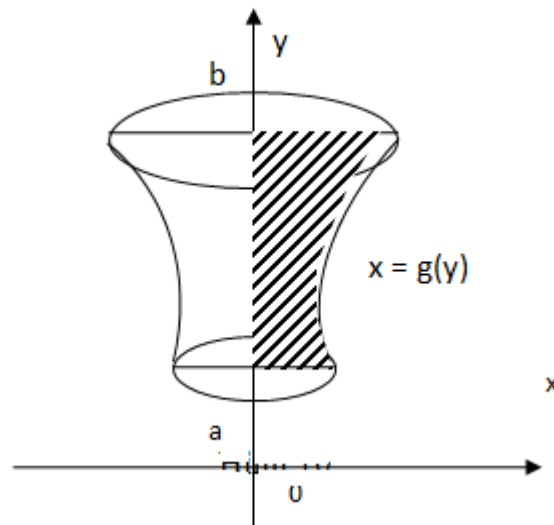


Hình 6

3.2. Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh Oy.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục Oy, $y = a$, $y = b$ ($a < b$) quay quanh Oy là:

$$V = \pi \int_a^b x^2(y) dy$$



Hình 7

4. Bài tập áp dụng

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

Giải

Ta có: $f(x) - g(x) = (x^3 - x) - (x - x^2) = x^3 + x^2 - 2x$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 1.$$

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx \\ &= \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^1 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Bài 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay do phần đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$ tâm O khi quay xung quanh trục Ox.

Giải

Khi (C) quay quanh Ox ta có mặt cầu, thể tích khối cầu là

$$V = \pi \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = x^2; y = x + 2;$

b) $y = |\ln x|;$

c) $y = (x - 6)^2; y = 6x - x^2.$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2; 5)$ và trục Oy.

3. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau khi quay xung quanh trục Ox:

a) $y = 1 - x^2; y = 0;$

b) $y = \cos x; y = 0; x = 0; x = \pi;$

c) $y = \tan x; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4}.$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Giải các phương trình và bất phương trình

$$a) 32^{\frac{5+5}{x-7}} = 0,125 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$$

$$b) 5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$$

$$c) \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$$

$$d) 25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$e) 2(\log_2 x)^2 x - 14 \log_4 x + 3 = 0$$

$$f) 7^{1+2x} - 8 \cdot 7^x + 1 = 0$$

$$i) \log_2(x-3) + 2 \log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$$

$$j) 3^{1-x} - 3^x + 2 = 0$$

$$k) (\log_2 x)^2 + 3 \log_2(2x) - 1 = 0$$

$$h) \log_3(x+2) > 1 - \log_3 x$$

2. Tính

$$a) \int (2-x) \sin x dx;$$

$$b) \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$c) \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx;$$

$$d) \int x e^x dx$$

$$e) \int x \cos x dx;$$

$$f) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$$

$$g) \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx;$$

$$h) \int \frac{5}{(3-x)(x+1)} dx$$

3. Tính:

$$a) \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2 + 16}) dx;$$

$$b) \int_1^2 (2 \cdot x^3 - \ln x) dx$$

$$c) \int_1^2 \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2} dx;$$

$$d) \int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$$

4. Tính:

$$a) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$b) \int_0^{\ln 2} e^x (e^x - 1)^2 dx$$

$$c) \int_0^e \frac{\sqrt{4+5\ln x}}{x} dx;$$

$$d) \int_0^1 x^2 (x-1)^2 dx$$

$$e) \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx;$$

$$f) \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$$

$$g) \int_0^2 x^2 e^{3x} dx;$$

$$h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot \sin^2 x dx$$

5. Xét hình phẳng D giới hạn bởi $y = 2\sqrt{1-x^2}$ và $y = 2(1-x)$.

a) Tính diện tích hình D.

b) Quay hình D xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

CHƯƠNG II. SỐ PHỨC

Mục tiêu

Sau khi nghiên cứu xong chương này, học sinh có thể:

- Nắm được các kiến thức cơ bản về số phức; các phép toán cộng, trừ và nhân số phức; phép toán chia số phức; phương trình bậc hai hệ số thực
- Trình bày được các phép toán về số phức;
- Áp dụng được các kiến thức để giải các bài tập về số phức.

BÀI 1. SỐ PHỨC

1. Số i

Ta đã biết các phương trình bậc hai với biệt số âm không có nghiệm thực. Phương trình bậc hai đơn giản nhất không có nghiệm thực là phương trình

$$x^2 + 1 = 0.$$

Với mong muốn mở rộng tập hợp số thực

$$i^2 = -1$$

2. Định nghĩa số phức

Mỗi biểu thức dạng $a + bi$; trong đó $a, b \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$ được gọi là một số phức.

Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$

($a, b \in \mathbb{R}$, a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$)

Tập hợp số phức: $\mathbb{C}$

3. Số phức bằng nhau:

Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

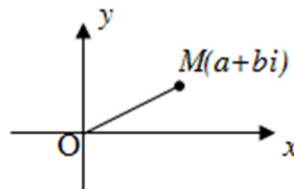
Ghi chú: $z = a + 0i$ là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 ($b = 0$)

z là thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng 0 ($a = 0$)

Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

4. Biểu diễn hình học số phức:

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hay bởi $\vec{u} = (a; b)$ trong mp(Oxy) (mp phức)



5. Môđun của số phức : $z = a + bi$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overline{OM}|$$

$$|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

6. Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$

$$\overline{\bar{z}} = z; \quad \overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'; \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

BÀI TẬP

1: Tìm phần thực và phần ảo của số phức

a) $z = 1 - \pi i$

b) $z = \sqrt{2} - i$

c) $z = 2\sqrt{2}$

d) $z = -7i$

2: Tìm các số thực x, y biết

a) $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$

b) $(1 - 2x) - i\sqrt{3} = \sqrt{5} + (1 - 3y)i$

c) $(2x + y) + (2y - x)i = (x - 2y + 3) + (y + 2x + 1)i$

3: Tính $|z|$ biết :

a) $z = -2 + i\sqrt{3}$

b) $z = \sqrt{2} - 3i$

c) $z = -5$

d) $z = i\sqrt{3}$

4 : Tìm $\bar{z}$ biết:

a) $z = 1 - i\sqrt{2}$

b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$

c) $z = 5$

d) $z = 7i$

BÀI 2. CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC

1. Phép cộng và phép trừ

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$$

Số đối của $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$

$\bar{u}$ biểu diễn z , $\bar{u}'$ biểu diễn z' thì $\bar{u} + \bar{u}'$ biểu diễn $z + z'$ và $\bar{u} - \bar{u}'$ biểu diễn $z - z'$.

2. Phép nhân :

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$$

$$k(a+bi) = ka + kbi; (k \in R)$$

BÀI TẬP

1: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

$$\text{a) } (4-i)+(2+3i)-(5+i) \quad \text{b) } 2-i+\left(\frac{1}{3}-2i\right) \quad \text{c) } (2-3i)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}i\right)$$

$$\text{d) } \left(3-\frac{1}{3}i\right)+\left(-\frac{3}{2}+2i\right)-\frac{1}{2}i \quad \text{e) } \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{5}i\right) \quad \text{f) } (2-3i)(3+i)$$

2: Thực hiện các phép toán sau

$$\text{a) } (1+i)^2-(1-i)^2 \quad \text{b) } (2+i)^3-(3-i)^3 \quad \text{c) } (3+4i)^2$$

$$\text{d) } (-1+i)^3-(2i)^3 \quad \text{e) } (1-i)^{100} \quad \text{f) } (3+3i)^5$$

BÀI 3. PHÉP CHIA SỐ PHỨC

1. Tổng và tích của hai số phức liên hợp:

Cho số phức $z = a + bi$, ta có:

- $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
- $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

2. Phép chia hai số phức:

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}; \quad (z \neq 0)$$

$$\frac{z'}{z} = z' z^{-1} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

$$\frac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = wz$$

BÀI TẬP

1: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

a) $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \frac{\sqrt{2}-i}{i}$

b) $\frac{3}{1+2i}$

c) $\frac{1+i}{1-i}$

d) $\frac{3+i}{(1-2i)(1+i)}$

e) $\frac{1+i}{2-i}$

f) $\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$

g) $\frac{2-3i}{4+5i}$

2: Thực hiện các phép toán sau:

a) $\left(\frac{1}{2} - 3i\right)^3$

b) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^2 - (2+i)^2}$

c) $(2-i)^6$

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

1. Căn bậc hai của số thực âm

- $z = x + yi$ là *căn bậc hai của số thực âm* $w = a + bi$ khi và chỉ khi

$$z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

- $w = 0$ có đúng 1 căn bậc hai là $z = 0$
- $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai đối nhau

Tổng quát: Căn bậc hai của số thực a dương là $\pm\sqrt{a}$;

Căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

Ví dụ :

Căn bậc hai của -2 là $\pm i\sqrt{2}$; Vì $(\pm i\sqrt{2})^2 = -2$;

Căn bậc hai của -3 là $\pm i\sqrt{3}$; Vì $(\pm i\sqrt{3})^2 = -3$;

Căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$; Vì $(\pm 2i)^2 = -4$;

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$; với $a; b; c \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy :

- Khi $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Khi $\Delta = 0$ phương trình có một nghiệm thực $x = \frac{-b}{2a}$;
- Khi $\Delta < 0$ phương trình có hai *nghiệm phức* được xác định bởi công thức

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Ví dụ : Giải phương trình

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Ta có $\Delta = 1 - 4 = -3$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phức là : $x_{1;2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau (ẩn z):

a) $z^2 + |z| = 0$

b) $z^2 + |z|^2 = 0$

c) $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$

d) $z^2 - \bar{z} = 0$

e) $|z| - 2z = -1 - 8i$

f) $(4 - 5i)z = 2 + i$

g) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$

h) $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$

i) $2|z| - 3z = 1 - 12i$

k) $(3 - 2i)^2(z + i) = 3i$

l) $[(2 - i)\bar{z} + 3 + i]\left(iz + \frac{1}{2i}\right) = 0$

m) $z\left(3 - \frac{1}{2}i\right) = 3 + \frac{1}{2}i$

$$o) \frac{3+5i}{z} = 2-4i$$

$$p) (z+3i)(z^2-2z+5)=0$$

$$q) (z^2+9)(z^2-z+1)=0$$

$$r) 2z^3-3z^2+5z+3i-3=0$$

2. Giải các phương trình sau (ẩn x):

$$a) x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$$

$$b) 3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$$

$$c) x^2 - (3-i)x + 4-3i = 0$$

$$d) 3x^2 - x + 2 = 0$$

$$e) 3x^3 - 24 = 0$$

$$f) 2x^4 + 16 = 0$$

$$g) x^2 + 7 = 0$$

$$h) x^2 + (2-3i)x = 0$$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) (2-i)(-3+2i)(5-4i)$$

$$b) \frac{3+7i}{2+3i} + \frac{5-8i}{2-3i}$$

$$c) (2-4i)(5+2i) + (3+4i)(-6-i)$$

2. Cho các số phức $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -2+3i$, $z_3 = 1-i$. Tính:

$$a) z_1 + z_2 + z_3$$

$$b) z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

$$c) z_1 z_2 z_3$$

$$d) z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

$$e) \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$$

$$f) \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$$

3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = z^4 + iz^3 - (1+2i)z^2 + 3z + 1 + 3i, \text{ với } z = 2+3i$$

$$b) B = (z - z^2 + 2z^3)(2 - z + z^2), \text{ với } z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$$

4. Tìm các số thực x, y sao cho:

$$a) (1-2i)x + (1+2y)i = 1+i$$

$$b) \frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$$

$$c) (4-3i)x^2 + (3+2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)i$$

5. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

$$a) z^2 + 5 = 0$$

$$b) z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$c) z^2 + 4z + 10 = 0$$

$$d) z^2 - 5z + 9 = 0$$

$$e) -2z^2 + 3z - 1 = 0$$

$$f) 3z^2 - 2z + 3 = 0$$

$$g) (z+\bar{z})(z-\bar{z}) = 0$$

$$h) z^2 + \bar{z} + 2 = 0$$

$$i) z^2 = \bar{z} + 2$$

$$k) 2z + 3\bar{z} = 2 + 3i$$

$$l) (z+2i)^2 + 2(z+2i) - 3 = 0$$

$$m) z^3 = \bar{z}$$

$$n) 4z^2 + 8|z|^2 = 8$$

$$o) iz^2 + (1+2i)z + 1 = 0$$

$$p) (1+i)z^2 + 2 + 11i = 0$$

6. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $x^2 - (3+4i)x + 5i - 1 = 0$ b) $x^2 + (1+i)x - 2 - i = 0$ c) $3x^2 + x + 2 = 0$
 d) $x^2 + x + 1 = 0$ e) $x^3 - 1 = 0$

7. Giải phương trình $z = \left(2 - \frac{z+1}{z-7}\right)^2$, **biết** $z = 3+4i$ **là một nghiệm của phương trình.**

8. Giải các phương trình sau:

a) $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$ b) $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$
 c) $z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1 = 0$ d) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$

9. Chứng minh rằng: nếu $|z| \leq 1$ **thì** $\left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1$.



PHẦN B. HÌNH HỌC

Chương: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu

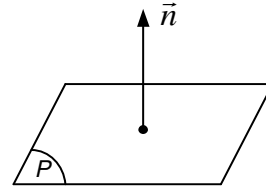
Sau khi nghiên cứu xong chương này, học sinh có thể:

- Học sinh nắm được các kiến thức cơ bản về phương trình mặt phẳng; phương trình đường thẳng trong không gian;
- Trình bày được các công thức về phương trình mặt phẳng; phương trình đường thẳng trong không gian;
- Mô tả được dạng hình học của phương trình mặt phẳng và phương trình đường thẳng trong không gian;
- Áp dụng và giải được các bài tập về Học sinh nắm được các kiến thức cơ bản về phương trình mặt phẳng; phương trình đường thẳng trong không gian;

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

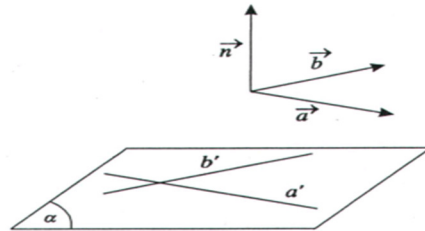
1. Vector pháp tuyến của mặt phẳng

1.1. Định nghĩa: Cho mp (P). Nếu vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) thì $\vec{n}$ đgl **vector pháp tuyến** của (P).



Chú ý: Nếu $\vec{n}$ là VTPT của (P) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của (P).

Vector $\vec{n}$ xác định $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ đgl **tích có hướng** (hay **tích vector**) của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ hoặc $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.



1.2. Nhận xét:

- Tích có hướng của hai vector cũng là một vector.
- Cặp vector $\vec{a}, \vec{b}$ ở trên đgl **cặp VTCP** của (P).

Ví dụ 1: Tìm một VTPT của mặt phẳng:

- a) Qua A(2; -1; 3), B(4; 0; 1), C(-10; 5; 3).
- b) Qua A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2).

Giải

- a) $\overline{AB} = (2; 1; -2)$; $\overline{AC} = (-12; 6; 0)$; $\overline{BC} = (-14; 5; 2)$

$$\Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] = [\overline{AB}, \overline{BC}] = (12; 24; 24) = (1; 2; 2).$$

b) $\overline{AB} = (-2; 2; 0); \overline{AC} = (-2; 0; 2); \overline{BC} = (-2; 2; 0)$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = [\overline{AB}, \overline{BC}] = (12; 24; 24)$$

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

2.1. Định nghĩa: Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.

▪ Nhận xét:

a) (P): $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$ (P) có 1 VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.

b) PT của (P) qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Ví dụ 2: Hãy tìm một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $4x - 2y - 6z + 7 = 0$.

Ví dụ 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với $M(1; 1; 1)$, $N(4; 3; 2)$, $P(5; 2; 1)$.

Giải

Ta có: $\overline{MN} = (3; 2; 1); \overline{MP} = (4; 1; 0)$.

Gọi $\vec{n} = \overline{MN} \wedge \overline{MP} = (-1; 4; -5)$.

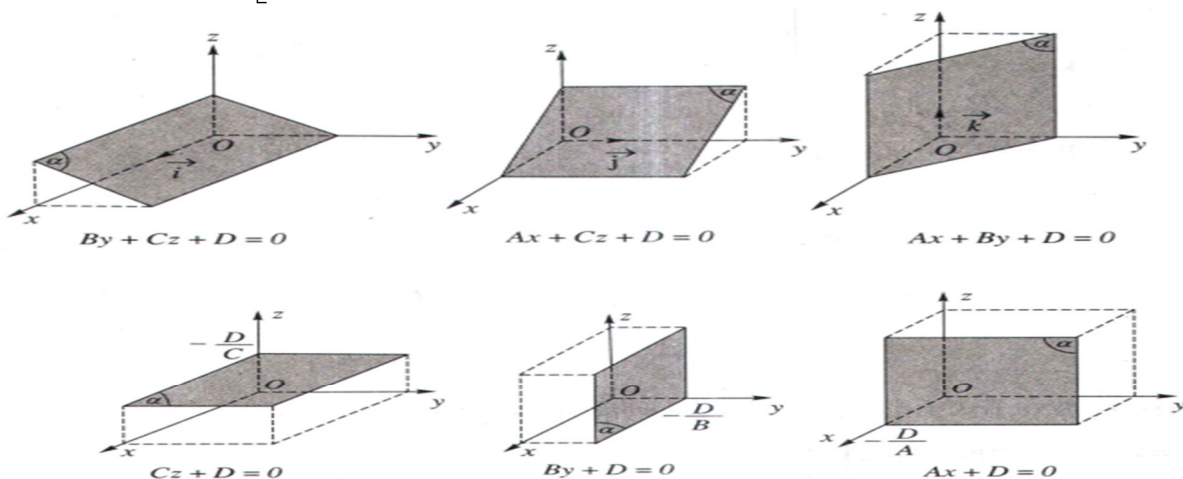
Phương trình mặt phẳng (MNP) đi qua $M(1; 1; 1)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 4; -5)$ là: $-1(x-1) + 4(y-1) - 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow -x + 4y - 5z + 2 = 0$

2.2. Các trường hợp riêng

a) $D = 0 \Leftrightarrow$ (P) đi qua O.

b) $A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (P) \supset Ox \\ (P) \parallel Ox \end{cases}$

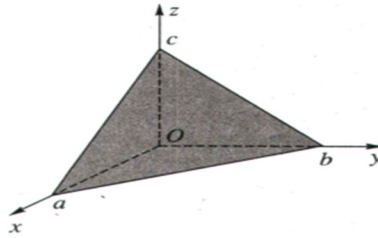
c) $A = B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (P) \parallel (Oxy) \\ (P) \equiv (Oxy) \end{cases}$



Nhận xét: Nếu các hệ số A, B, C, D đều khác 0 thì có thể đưa phương trình của (P) về dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2)$$

(2) được gọi là **phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn**.



3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

3.1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong KG cho 2 mp $(P_1), (P_2)$:

$$(P_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(P_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

- $(P_1) \parallel (P_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

- $(P_1) \equiv (P_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

- (P_1) cắt (P_2)

$$\Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k(A_2; B_2; C_2)$$

Ví dụ 4: Cho hai mp (P_1) và (P_2) :

$$(P_1): x - my + 4z + m = 0$$

$$(P_2): x - 2y + (m + 2)z - 4 = 0$$

Tìm m để (P_1) và (P_2) :

- song song
- trùng nhau
- cắt nhau.

Ví dụ 5: Viết PT mp (P) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và song song với mp $(Q): 2x - 3y + z + 5 = 0$.

Giải

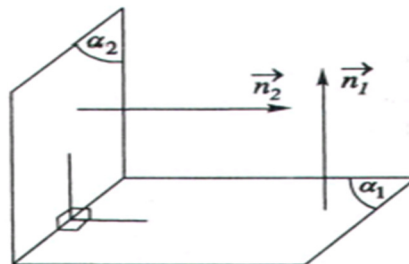
Vì $(P) \parallel (Q)$ nên (P) có VTPT $\vec{n} = (2; -3; 1)$.

$$\Rightarrow (P): 2(x-1) - 3(y+2) + 1(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + z - 11 = 0.$$

3.2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

$$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$



Ví dụ 6: Xác định m để hai mp sau vuông góc với nhau:

$$(P): 2x - 7y + mz + 2 = 0$$

$$(Q): 3x + y - 2z + 15 = 0$$

Giải

$$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 7: Viết phương trình mp (P) đi qua hai điểm A(3; 1; -1), B(2; -1; 4) và vuông góc với mp (Q): $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Giải

(P) có cặp VTCP là:

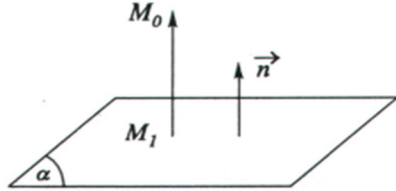
$$\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 5) \text{ và } \vec{n}_Q = (2; -1; 3); \vec{n}_P = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q] = (-1; 13; 5)$$

$$\Rightarrow (P): x - 13y - 5z + 5 = 0.$$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định lí: Trong KG Oxyz, cho (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

$$d(M_0; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Ví dụ 8: Tính khoảng cách từ điểm M đến mp(P):

- a) M(1; -2; 13); (P): $2x - 2y - z + 3 = 0$ b) M(2; -3; 5); (P): $2x - y + 2z - 6 = 0$
 c) M(1; -4; -2); (P): $x + y + 5z - 14 = 0$ d) M(3; 1; -2); (P) $\equiv$ (Oxy)

Giải

a) $d(M, (P)) = \frac{4}{3}$; b) $d(M, (P)) = \frac{11}{3}$

c) $d(M, (P)) = \sqrt{27}$; d) $d(M, (P)) = 2$

Ví dụ 9: Tính khoảng cách giữa hai mp song song (P) và (Q):

a) (P): $x + 2y + 2z + 11 = 0$; (Q): $x + 2y + 2z + 2 = 0$

b) (P): $4x - y + 8z + 1 = 0$; (Q): $4x - y + 8z + 5 = 0$

Giải

Bằng khoảng cách từ 1 điểm trên mp này đến mp kia.

a) Lấy $M(0; 0; -1) \in (Q)$.

$$d((P), (Q)) = d(M, (P)) = 3$$

b) Lấy $M(0; 1; 0) \in (P)$

$$d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{4}{9}$$

Ví dụ 10: Viết pt mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mp (P):

a) $\begin{cases} I(3; -5; -2) \\ (P): 2x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} I(1; 4; 7) \\ (P): 6x + 6y - 7z + 42 = 0 \end{cases}$

Giải

$$R = d(I, (P))$$

$$a) (x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = \frac{162}{7}$$

$$b) (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = \left(\frac{23}{11}\right)^2$$

Ví dụ 11: Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M:

$$a) (S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$$

$$M(-1; 3; 0)$$

$$b) (S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$$

$$M(7; -1; 5)$$

Giải

Ta có: $\vec{n} = \overrightarrow{IM}$

$$a) (P): -4(x+1) + 2(y-3) + 2z = 0$$

$$b) (P): 6(x-7) + 2(y+1) + 3(z-5) = 0$$

BÀI TẬP

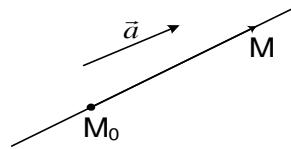
- Viết phương trình của mặt phẳng:
 - Đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vector pháp tuyến;
 - Đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và song song với giá của mỗi vector $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (-3; 0; 1)$
 - Đi qua 3 điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -1)$.
- Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2; 3; 7)$, $B(4; 1; 3)$.
- Lập phương trình của các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).
- Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm $M(2; 6; -3)$ và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.
- Lập phương trình của mặt phẳng:
 - Chứa trục Ox và điểm $P(4; -1; 2)$;
 - Chứa trục Oy và điểm $Q(1; 4; -3)$;
 - Chứa trục Oz và điểm $R(3; -4; 7)$.
- Cho tứ diện có các đỉnh là $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$.
 - Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD).
 - Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.
- Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z + 4 = 0$.
- Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + z - 7 = 0$.
- Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau:
 - $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$;
 - $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$.
- Tính khoảng cách từ điểm $A(2; 4; -3)$ lần lượt đến các mặt phẳng sau:
 - $2x - y + 2z - 9 = 0$;
 - $12x - 5z + 5 = 0$;
 - $x = 0$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Phương trình tham số của đường thẳng

1.1. Định lí: Trong KG Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP. Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x; y; z)$ nằm trên Δ là có một số thực t sao cho:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$



1.2. Định nghĩa: Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là phương trình có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

trong đó t là tham số.

Chú ý: Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì có thể viết phương trình của Δ dưới dạng chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Ví dụ 1: Viết PTTS của đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có VTCP $\vec{a}$, với:

- a) $M(1; 2; -3), \vec{a} = (-1; 3; 5)$ b) $M(0; -2; 5), \vec{a} = (0; 1; 4)$
 c) $M(1; 3; -1), \vec{a} = (1; 2; -1)$ d) $M(3; -1; -3), \vec{a} = (1; -2; 0)$

Ví dụ 2: Cho các điểm $A(2; 3; -1), B(1; 2; 4), C(2; 1; 0), D(0; 1; 2)$. Viết PTTS của các đường thẳng AB, AC, AD, BC.

Giải

$$\vec{AB} = (-1; -1; 5), A(2; 3; -1)$$

$$\Rightarrow \text{PTTS của AB: } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

Các phương trình đường thẳng còn lại HS tự giải tương tự.

Ví dụ 3: Viết PTTS của Δ đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P):

- a) $A(-2; 4; 3), (P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$; b) $A(3; 2; 1), (P): 2x - 5y + 4 = 0$;
 c) $A(1; -1; 0), (P) \equiv (Oxy)$; d) $A(2; -3; 6), (P) \equiv (Oyz)$;

Giải

- a) Vì $\Delta \perp (P)$ nên $\vec{a} = \vec{n} = (2; -3; 6)$

$$\Rightarrow \text{PTTS của } \Delta: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Ví dụ 4: Cho đường thẳng Δ có PTTS. Hãy xác định một điểm $M \in \Delta$ và một VTCP của Δ .

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

Giải

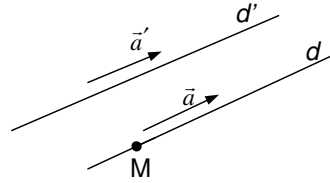
Cho $t = t_0$, thay vào PT của Δ . Với $t = 0 \Rightarrow M(-1; 3; 5) \in \Delta$.

2. Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau

2.1. Điều kiện để hai đường thẳng song song

Gọi $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$ lần lượt là VTCP của d và d' . Lấy $M(x_0; y_0; z_0) \in d$.

$$d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}' \\ M \notin d' \end{cases}$$



Đặc biệt: $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}' \\ M \in d' \end{cases}$

Ví dụ 5: Chứng minh hai thẳng sau song song song:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 2 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}; d': \begin{cases} x = -1 - 2t' \\ y = 2 - t' \\ z = -3 - 2t' \end{cases}$

c)

$$d: \frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{3}$$

$$d': \frac{x-7}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-5}{2}$$

Giải

a) $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{a}' = (2; 4; -2)$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương.

Ví dụ 6: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d cho trước:

a) $A(2; -5; 3)$, $d: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

b) $A(1; -3; 2)$, $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$

c) $A(4; -2; 2)$, $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}$

d) $A(5; 2; -3)$, $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$

Giải

Vì $\Delta \parallel d$ nên Δ cũng nhận VTCP của d làm VTCP.

a) Phương trình đường thẳng đi qua $A(2; -5; 3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (-3; 4; -2)$ là:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

b) , c) , d) giải tương tự như câu a).

2.2. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau

Cho 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, d': \begin{cases} x = x'_0 + t'a'_1 \\ y = y'_0 + t'a'_2 \\ z = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$

d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ pt ẩn t, t' sau có đúng 1 nghiệm:

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} (*)$$

Ví dụ 7: Tìm giao điểm của hai đường thẳng sau:

$$a) d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -2 + t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$$

$$b) d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$c) d: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \\ z = 4 + t' \end{cases}$$

$$d) d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$$

Ví dụ 8: Tìm m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Khi đó tìm tọa độ giao điểm của chúng

$$a) d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

$$b) d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = m + t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = 2 - 3t' \end{cases}$$

2.3. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau

Cho 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, d': \begin{cases} x = x'_0 + t'a'_1 \\ y = y'_0 + t'a'_2 \\ z = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$

d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow$ hai VTCP không cùng phương và hệ pt ẩn t, t' sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} (*)$$

• $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{a}'$.

Ví dụ 9: Chứng tỏ các cặp đường thẳng sau chéo nhau:

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}, d': \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 + t' \\ z = 3 - 2t' \end{cases}$$

$$\text{c) } d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$$

$$d': \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$$

$$\text{d) } d: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

$$d': \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

BÀI TẬP

1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $M(5; 4; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$;

b) d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - z + 5 = 0$;

c) d đi qua điểm $B(2; 0; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$;

d) d đi qua hai điểm $P(1; 2; 3)$ và $Q(5; 4; 4)$.

2. Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

lên lượt trên các mặt phẳng sau:

a) (Oxy) ; b) (Oyz) .

3. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$

4. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

$$d: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

5. Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và } (\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0;$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và } (\alpha): x + 3y + z + 1 = 0;$$

$$\text{c) } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \text{ và } (\alpha): x + y + z - 4 = 0;$$

$$\text{6. Tính khoảng cách giữa đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ và mặt phẳng}$$

$$(\alpha): 2x - y + z + 3 = 0.$$

$$\text{7. Cho điểm } A(1; 0; 0) \text{ và đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}.$$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ .

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ .

$$\text{8. Cho điểm } M(1; 4; 2) \text{ và mặt phẳng } (\alpha): x + y + z - 1 = 0.$$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α) .

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) .

9. Cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}.$$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

ÔN TẬP CHƯƠNG

1. Cho bốn điểm $A(-2; 6; 3)$, $B(1; 0; 6)$, $C(0; 2; -1)$, $D(1; 4; 0)$.
 - a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra ABCD là một tứ diện.
 - b) Tính chiều cao AH của tứ diện ABCD.
 - c) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD.
2. Lập phương trình tham số của đường thẳng:
 - a) Đi qua hai điểm $A(1; 0; -3)$, $B(3; -1; 0)$.
 - b) Đi qua điểm $M(2; 3; -5)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -5t \end{cases}$$
3. Cho mặt phẳng (α) có phương trình $3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$
 - a) Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α) .
 - b) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa điểm M và vuông góc với đường thẳng d .
4. Cho điểm $A(-1; 2; -3)$, vector $\vec{a} = (6; -2; -3)$ và đường thẳng d có phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t. \end{cases}$$
 - a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với giá của $\vec{a}$.
 - b) Tìm giao điểm M của d và (α) .
 - c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với giá của $\vec{a}$ và cắt đường thẳng d .
5. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; -1; 2)$ trên mặt phẳng (α) : $2x - y + 2z + 11 = 0$.
6. Cho điểm $M(2; 1; 0)$ và mặt phẳng (α) : $x + 3y - z - 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (α) .
7. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}.$$

PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH TOÁN 6

Số TT	Tên các bài trong học phần	Thời gian (giờ)			
		Lý thuyết	Bài tập	Kiểm tra	Tổng số
A	TOÁN 6A: GIẢI TÍCH	23	25	2	50
1	Chương I: Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng	16	16	1	33
	1. Phương trình mũ và phương trình lôgarit	3	3		6
	2. Bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit	2	2		4
	3. Nguyên hàm	4	3		7
	4. Tích phân	4	3		7
	5. Ứng dụng của tích phân trong hình học	3	2		5
	6. Ôn tập chương I	0	3		3
	7. Kiểm tra 45 phút			1	1
2	Chương II: Số phức	7	9	1	17
	1. Số phức	1	0		1
	2. Cộng , trừ và nhân số phức	2	1		3
	3. Phép chia số phức	2	1		3
	4. Phương trình bậc hai với hệ số thực	2	1		3
	5. Ôn tập chương II		2		2
	6. Kiểm tra 45 phút			1	1
	7. Ôn tập cuối kỳ		4		4
B	TOÁN 6B: HÌNH HỌC	10	14	1	25
1	Chương: Phương pháp tọa độ trong không gian	10	11	1	22
	1. Phương trình mặt phẳng	5	4		9
	2. Phương trình đường thẳng trong không gian	5	4		9
	3. Ôn tập chương		3		3
	4. Kiểm tra một tiết			1	1

Số TT	Tên các bài trong học phần	Thời gian (giờ)			
		Lý thuyết	Bài tập	Kiểm tra	Tổng số
2	Ôn tập cuối năm		3		3
Tổng cộng		33	39	3	75

MỤC LỤC

PHẦN A: TOÁN 6A: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH.....	1
CHƯƠNG I: NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	1
Bài 1: PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGAR.....	1
1. Phương trình mũ	1
1.1. Phương trình mũ cơ bản	1
1.2. Cách giải một số phương trình mũ đơn giản	1
2. Phương trình Lôgarit	2
2.1. Phương trình lôgarit cơ bản	2
2.2. Cách giải một số phương trình lôgarit đơn giản.....	2
Bài 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT	4
1 . Bất phương trình mũ.....	4
1.1. Bất phương trình mũ cơ bản.....	4
1.2. Một số bất phương trình mũ đơn giản	4
2. Bất phương trình Lôgarit	4
2.1. Bất phương trình lôgarit cơ bản.....	4
2.2. Một số bất phương trình lôgarit đơn giản.....	4
Bài 3: NGUYÊN HÀM.....	6
1. Nguyên hàm và tính chất	6
1.1. Nguyên hàm.....	6
1.2. Tính chất của nguyên hàm.....	6
1.3. Sự tồn tại nguyên hàm	6

1.4. Bảng nguyên hàm của một số hàm sơ cấp.....	7
2. Phương pháp tính nguyên hàm	7
2.1. Phương pháp đổi biến số	7
2.2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần	7
Bài 4: TÍCH PHÂN.....	9
1 . Khái niệm tích phân	9
1.1. Diện tích hình thang cong.....	9
1.2. Định nghĩa tích phân.....	10
2. Tính chất của tích phân	10
3. Phương pháp tính tích phân	10
3.1. Phương pháp đổi biến số	10
3.2. Phương pháp tính tích phân từng phần.....	10
Bài 5: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC	14
1. Tính diện tích hình phẳng.....	14
1.1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành.....	14
1.2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong	14
2. Tính thể tích	15
2.1. Thể tích của vật thể.....	15
2.2. Thể tích khối chóp và khối chóp cụt	15
3. Thể tích của khối tròn xoay	16
ÔN TẬP CHƯƠNG I	18
Chương II: SỐ PHỨC.....	19
Bài 1: SỐ PHỨC	19
1. Số i	19
2. Định nghĩa số phức.....	19
3. Số phức bằng nhau	19
4. Biểu diễn hình học số phức	19
5. Môđun của số phức.....	19
6. Số phức liên hợp	20

Bài 2: CỘNG TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC.....	21
1. Phép cộng và phép trừ	21
2. Phép nhân	21
Bài 3: PHÉP CHIA SỐ PHỨC	22
1. Tổng và tích của hai số phức liên hợp.....	22
2. Phép chia hai số phức	22
Bài 4: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC	23
1. Căn bậc hai của số thực âm	23
2. Phương trình bậc hai với hệ số thực	23
ÔN TẬP CHƯƠNG II.....	24
PHẦN B: HÌNH HỌC	26
Chương: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.....	26
Bài 1: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	26
1. Vector pháp tuyến của mặt phẳng.....	26
2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng	27
2.1. Định nghĩa	27
2.2. Các trường hợp riêng	27
3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc	28
3.1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song.....	28
3.2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc	28
4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.....	29
Bài 2: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN.....	31
1. Phương trình tham số của đường thẳng.....	31
2. Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.....	32
2.1. Điều kiện để hai đường thẳng song song	32
2.2. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau	33
2.3. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau	33
ÔN TẬP CHƯƠNG	36